

Exercice n°1 • Chambre à bulles



1) Les particules subissent une force de frottement fluide qui amorti leur mouvement, d'où le mouvement spiralaire. Ces spirales sont donc parcourues de l'extérieur vers l'intérieur.

2) Il faut raisonner avec le sens de la force de Lorentz magnétique : $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$. Ligne droite : non chargée. Sens trigonométrique : charge $q < 0$. Sens horaire : $q > 0$.

3) Pour différentier deux particules de charge de même signe, il faut regarder le rayon du cercle :

$$R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

qui dépend de m et de $|q|$.

Exercice n°2 • Microscope électronique



1) On applique le TEM sur l'électron entre l'anode et la cathode, dans le référentiel du microscope supposé galiléen.

$$\Delta\mathcal{E}_m = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

2) La longueur d'onde de de Broglie vaut :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2emU}} = 54 \text{ pm}$$

3) Cette longueur d'onde est 10 000 fois plus petite que de la lumière visible. Un microscope électronique permet donc d'imager des objets 10 000 fois plus petit qu'un microscope optique car il repousse les limites de la diffraction d'un facteur 10 000.

Exercice n°3 • Sélecteur de vitesse



1) La particule est soumise uniquement à la force de Lorentz. Le vecteur vitesse de la particule reste inchangé si son vecteur accélération est nul, c'est-à-dire d'après le PFD si la force de Lorentz est nulle.

$$\vec{F}_L = \vec{0} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Ce qui donne :

$$\vec{0} = q(E_0 - v_0 B_0) \vec{u}_y \Rightarrow v_0 = \frac{E_0}{B_0}$$

2) On peut utiliser la contraposée de la question précédente : si le vecteur vitesse de la particule n'est pas égal à $\vec{v}_0 = \frac{E_0}{B_0} \vec{u}_x$ alors elle est déviée. En plaçant par exemple un masque en sortie de la zone de champ, on peut ne garder que les particules passant par un trou accessible seulement si elles ont la vitesse $\vec{v}_0$ et bloquer les autres.

Exercice n°4 • Cyclotron



1) Dans un dé, le proton n'est plongé que dans un champ magnétique uniforme. Il est donc soumis à la force : $\vec{F} = e \vec{v} \wedge \vec{B}$. Cette force est orthogonale à $\vec{v}$ et donc ne travail pas. L'énergie cinétique et par conséquent la norme de la vitesse sont donc constantes.

2) À l'entrée du dé, $\vec{v} \perp \vec{B}$. Le mouvement est donc circulaire uniforme.

3) Accélération dans le repère de Frenet :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$$

Or, un champ magnétique ne peut pas changer la norme de la vitesse, donc $\|\vec{v}\| = v = cte$. Ainsi,

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{u}_N = \frac{e}{m} \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow R = \frac{v^2 \|\vec{u}_N\|}{\frac{e}{m} \|\vec{v} \wedge \vec{B}\|} = \frac{mv}{eB}$$

4) Lors d'un demi-tour dans un dé, le proton parcourt une distance $d = \pi R$ à la vitesse v . Cela dure le temps :

$$T_{1/2} = \frac{d}{v} = \frac{\pi m}{eB} = 32,7 \text{ ns}$$

Ce temps est indépendant de la vitesse du proton.

5) On considère que le temps de passage entre les deux dés est instantané. Pour que le champ $\vec{E}$ accélère au mieux les protons, il faut qu'il soit maximal (maximal en valeur absolue et > 0) lorsque le proton traverse la région centrale de gauche à droite ; et minimal (maximal en valeur absolue et < 0) lorsque le proton traverse la

région centrale de droite à gauche.

Il faut donc que la période soit égale à $T_c = 2 \times T_{1/2}$. On en déduit la fréquence :

$$f_c = \frac{1}{T_c} = \frac{eB}{2\pi m} = 15,3 \text{ MHz}$$

6) On se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le TEC appliqué entre l'entrée et la sortie de la zone centrale donne :

$$\Delta \mathcal{E}_c = eU_m = 2,5 \text{ keV} = 4,0 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

7) On part avec une énergie cinétique nulle et on souhaite atteindre une énergie :

$$\mathcal{E}_{c,f} = \frac{1}{2}mv_f^2 = 3,25 \text{ MeV}$$

Il faut donc que le proton passe par la zone centrale $N_{1/2}$ fois, avec :

$$N_{1/2} = \frac{\mathcal{E}_{c,f}}{\Delta \mathcal{E}_c} = 1300$$

Or, le proton passe 2 fois par la zone centrale en 1 tour. Il doit donc réaliser :

$$N = \frac{N_{1/2}}{2} = 650 \text{ tours}$$

8) Le rayon du dernier tour vaut :

$$R_f = \frac{mv_f}{eB} = 26 \text{ cm}$$

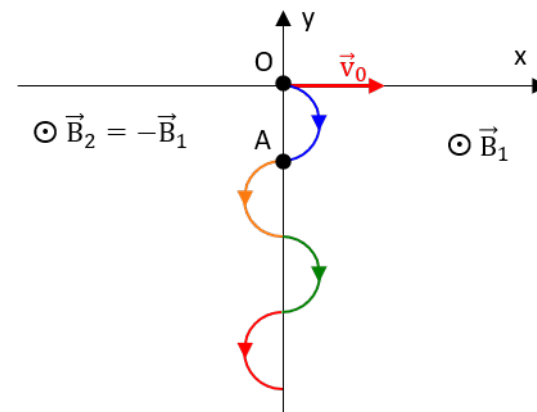
Il est donc possible de construire des accélérateurs de particules dont le diamètre est inférieur au mètre, ce qui est tout à fait raisonnable pour un hôpital par exemple.

Exercice n°5 • Action de deux champs magnétiques successifs ★★☆☆

1) La particule chargée évolue dans un champ magnétique où $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$. Le mouvement est donc dans le plan (Oxy) . Il s'agit d'un mouvement circulaire de rayon :

$$R = \frac{mv_0}{qB_0}$$

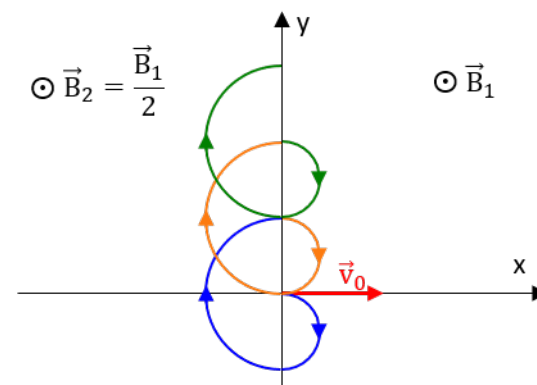
Le sens de parcourt du cercle dépend du sens du champ magnétique, donc du demi-espace considéré. La trajectoire est ainsi :



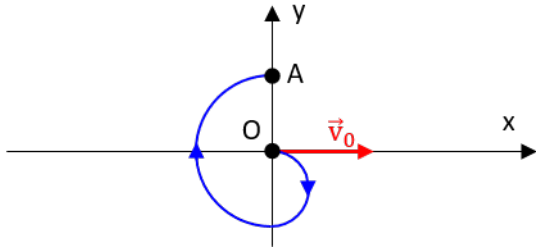
2) Notons $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$ la vitesse de la particule. Il est évident graphique que $\langle v_x \rangle = 0$ puisque la trajectoire reste centrée autour de l'axe y . Ainsi, $\langle \vec{v} \rangle = \langle v_y \rangle \vec{u}_y$. La vitesse moyenne de la particule correspond donc à la vitesse d'une particule fictive qui irait de O vers A en ligne droite, en un temps égal à celui de la particule réel.

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{OA}}{t_{OA}} = -\frac{2R}{\pi R/v_0} \vec{u}_y = -\frac{2v_0}{\pi} \vec{u}_y$$

3) Nature de la trajectoire :



Calculons la vitesse moyenne de la particule, c'est-à-dire (avec le même raisonnement) la vitesse moyenne sur la trajectoire bleue.



Sur le trajet bleu (demi-cercle de rayon R et demi-cercle de rayon $2R$) :

$$\ell_{OA} = v_0 t_{OA} = \pi R + \pi 2R = 3\pi R$$

On en déduit la vitesse moyenne de la particule :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\overrightarrow{OA}}{t_{OA}} = \frac{2R}{3\pi R/v_0} \vec{u}_y = \boxed{\frac{2v_0}{3\pi} \vec{u}_y}$$

Exercice n°6 • Expérience de J. J. Thomson (1897)



1) Lorsque $0 \leq x \leq a$, on étudie une particule chargée dans un champ électrique uniforme. La trajectoire est donc une **parabole**. Lorsque $x \geq a$, le champ électrique est nul. La particule n'est donc soumise à aucune force. La trajectoire est **rectiligne**. On applique le PFD dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La particule est soumise uniquement à la force de Lorentz (électrique uniquement car $\vec{B} = \vec{0}$).

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = eE \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = eEt \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{eE}{2} t^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

On en déduit la nature de la trajectoire :

$$\boxed{y(x) = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2}$$

Ainsi, le point M a pour ordonnée :

$$\boxed{y_M = \frac{eEa^2}{2mv_0^2}}$$

2) La trajectoire rectiligne a pour équation : $y_2 = y'(a) \cdot x + b$. En effet, la pente de cette droite est donnée par la dérivée de la trajectoire parabolique en $x = a$.

$$y'(x) = \frac{eE}{mv_0^2} x \Rightarrow y'(a) = \frac{eEa}{mv_0^2}$$

De plus, la trajectoire rectiligne passe par le point M lorsque $x = a$. On en déduit :

$$\frac{eEa^2}{2mv_0^2} = \frac{eEa^2}{mv_0^2} + b \Rightarrow b = -\frac{eEa^2}{2mv_0^2}$$

L'équation de la trajectoire rectiligne est donc :

$$\boxed{y_2(x) = \frac{eEa}{mv_0^2} \left(x - \frac{a}{2}\right)}$$

Or, le point I est le point de cette droite où $y_2 = 0$. On en déduit $\boxed{x_I = a/2}$. Le point I est bien le milieu de OA .

On en déduit la valeur de Y . Dans les triangles IMA et IPH , on a :

$$\sin(\alpha) = \frac{y_M}{a/2} = \frac{Y}{D} \Rightarrow \boxed{Y = \frac{eEaD}{mv_0^2}}$$

3) On applique le PFD dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La particule est soumise uniquement à la force de Lorentz : $\vec{F} = -e(\vec{E} \vec{v} + \wedge \vec{B})$. Ainsi,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = eB\dot{y} \\ m\ddot{y} = e(E - B\dot{x}) \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Dans cette expérience, on souhaite que $y(t) = 0$ durant toute la durée de l'expérience. Ceci implique que :

$$\begin{cases} \dot{y} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{x} = cte = v_0} \\ \ddot{y} = 0 \Rightarrow \boxed{E - B\dot{x} = 0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{E}{B}}$$

4) On revient dans l'expérience n°1. Thomson mesure la déviation :

$$Y = \frac{eEaD}{mv_0^2} = \frac{eaDB^2}{mE} \Rightarrow \boxed{\frac{e}{m} = \frac{YE}{aDB^2}}$$

Il contrôle E et B et peut mesurer a , D et Y . Il en déduit ainsi la valeur de e/m .

5) L'incertitude-type sur e/m vaut (formule du produit) :

$$u\left(\frac{e}{m}\right) = \frac{e}{m} \sqrt{\left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + \left(\frac{u(E)}{E}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(D)}{D}\right)^2 + 2\left(\frac{u(B)}{B}\right)^2}$$

Toutes les incertitudes $u(Y)$, $u(E)$, $u(a)$, $u(D)$ et $u(B)$ sont constantes et fixées par ses instruments de mesures. Il faut donc augmenter D , ce qui va également augmenter Y , et ainsi rendre négligeable les incertitudes relatives suivantes :

$$\frac{u(Y)}{Y} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{u(D)}{D} \rightarrow 0$$

et donc diminuer l'incertitude de la mesure de e/m .

Exercice n°7 • Trajectoire dans une chambre à bulles



1) On applique le PFD :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \dot{y}B_0 \\ -\dot{x}B_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\ddot{x} = \omega_c \dot{y} - \frac{\dot{x}}{\tau}$$

$$\ddot{y} = -\omega_c \dot{x} - \frac{\dot{y}}{\tau}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\dot{z}}{\tau}$$

2) On a :

$$\underline{\ddot{u}} = \underline{\ddot{x}} + i \underline{\ddot{y}} = \omega_c \dot{y} - \frac{\dot{x}}{\tau} + i \left(-\omega_c \dot{x} - \frac{\dot{y}}{\tau} \right) = \left(-\frac{1}{\tau} - i\omega_c \right) (\dot{x} + i \dot{y})$$

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\dot{u}}$:

$$\frac{d\underline{\dot{u}}}{dt} + \left(\frac{1}{\tau} + i\omega_c \right) \underline{\dot{u}} = 0$$

3) La solution est :

$$\underline{\dot{u}}(t) = (a + ib) e^{-(1/\tau + i\omega_c)t}$$

En prenant les parties réelles et imaginaires, il vient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{R}e(\underline{\dot{u}}(t)) = e^{-t/\tau} (a \cos(\omega_c t) + b \sin(\omega_c t)) \\ \dot{y}(t) = \mathcal{I}m(\underline{\dot{u}}(t)) = e^{-t/\tau} (-a \sin(\omega_c t) + b \cos(\omega_c t)) \end{cases}$$

Avec les conditions initiales, il vient :

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_{0x} = a \\ \dot{y}(0) = 0 = b \end{cases}$$

On intègre alors $\underline{\dot{u}}(t)$ sachant que la particule se trouve en O à l'instant initial.

$$\underline{u}(t) = \frac{v_{0x}}{1/\tau + i\omega_c} \left(1 - e^{-(1/\tau + i\omega_c)t} \right) = v_{0x} \frac{1/\tau - i\omega_c}{1/\tau^2 + \omega_c^2} \left(1 - e^{-(1/\tau + i\omega_c)t} \right)$$

En prenant les parties réelles et imaginaires, il vient :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_{0x}}{1/\tau^2 + \omega_c^2} \left[\frac{1}{\tau} + e^{-t/\tau} \left(-\frac{1}{\tau} \cos(\omega_c t) + \omega_c \sin(\omega_c t) \right) \right] \\ y(t) = \frac{v_{0x}}{1/\tau^2 + \omega_c^2} \left[-\omega_c + e^{-t/\tau} \left(\omega_c \cos(\omega_c t) + \frac{1}{\tau} \sin(\omega_c t) \right) \right] \end{cases}$$

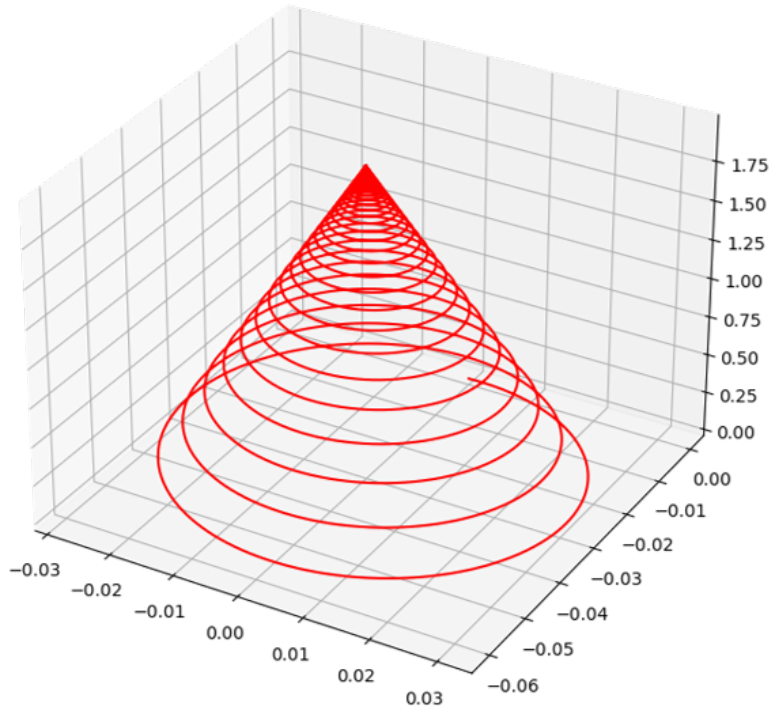
Enfin, $\dot{z}(t)$ s'obtient simplement à l'aide du PFD :

$$\ddot{z} = -\frac{\dot{z}}{\tau} \Rightarrow \dot{z} = v_{0z} e^{-t/\tau} \Rightarrow z(t) = \frac{v_{0z}}{\tau} \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

4) La particule se déplace sur la surface d'un cône de sommet la position finale, donnée par :

$$x_\infty = \frac{v_{0x}/\tau}{1/\tau^2 + \omega_c^2}, \quad y_\infty = \frac{-\omega_c v_{0x}}{1/\tau^2 + \omega_c^2} \quad \text{et} \quad z_\infty = v_{0z}/\tau.$$

Graphe :



Exercice n°8 • Trajectoire dans un champ électromagnétique ★★★

1) On applique le PFD à une particule de charge q soumise à la force de Lorentz magnétique seule (le poids est négligé) dans un référentiel supposé galiléen lié à l'atmosphère.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \Rightarrow m \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} v_y \\ v_z \\ v_x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boxed{\dot{v}_x - \frac{qB_0}{m}v_y = 0} \quad \boxed{\dot{v}_y + \frac{qB_0}{m}v_x = 0} \quad \boxed{\dot{v}_z = 0}$$

La troisième équation permet d'affirmer que $\dot{v}_z$ est une constante du mouvement :

$$\boxed{v_z = cte = v_{\parallel}}$$

La puissance de la force magnétique de Lorentz est nulle $\mathcal{P}_{mag} = q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$. Le théorème de la puissance cinétique donne alors :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}^2}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}^2 = cte = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}$$

2) Par définition, $\vec{w} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$. Ainsi :

$$\boxed{\dot{w}_x - \frac{qB_0}{m}w_y = 0} \quad \boxed{\dot{w}_y + \frac{qB_0}{m}w_x = 0}$$

3) Voir démonstration du cours :

$$\boxed{\rho_c = \frac{mv_{\perp}}{qB_0} = \frac{v_{\perp}}{\Omega_c}} \quad \boxed{\Omega_c = \frac{qB_0}{m}}$$

4) L'ordre de grandeur du champ géomagnétique au voisinage de la surface terrestre est 10^{-5} T. On en déduit : $\boxed{\Omega_c = 10^6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$ pour un électron et $\boxed{\Omega_c = 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$ pour un proton.

5) On ajoute au bilan des forces de la question le terme électrique de la force de Lorentz :

$$\boxed{\dot{v}_x - \frac{qB_0}{m}v_y = \frac{qE_1}{m}} \quad \boxed{\dot{v}_y + \frac{qB_0}{m}v_x = 0} \quad \boxed{\dot{v}_z = 0}$$

6) La solution constante dans le plan (Oxy) correspondant à un mouvement rectiligne uniforme dans ce plan :

$$\begin{cases} v_y = -\frac{qE_1}{m\Omega_c} \\ v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_d = -\frac{qE_1}{m\Omega_c}\vec{e}_y = -\frac{E_1}{B_0}\vec{e}_y}$$

7) Par définition de $\vec{u}$, on a :

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y + \frac{qE_1}{m\Omega_c} \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'ED vérifiée par $\vec{u}$ est :

$$\begin{cases} \dot{u}_x - \Omega_c u_y = \frac{qE_1}{m} \\ \dot{u}_y + \Omega_c u_x = 0 \\ \dot{u}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u}_x - \Omega_c \left(u_y - \frac{qE_1}{m\Omega_c} \right) = \frac{qE_1}{m} \\ \dot{u}_y + \Omega_c u_x = 0 \\ \dot{u}_z = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\dot{u}_x - \Omega_c u_y = 0$$

$$\dot{u}_y + \Omega_c u_x = 0$$

$$\dot{u}_z = 0$$

On retrouve l'équation du mouvement de la première partie. La vitesse $\vec{u}$ représente la vitesse de la particule dans le référentiel $\mathcal{R}_d$ en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}_d$ par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_L$.

On a montré que les équations différentielles vérifiées par $\vec{v}$ conduisent à un mouvement circulaire uniforme, ici dans le référentiel $\mathcal{R}_d$. Dans le référentiel $\mathcal{R}_L$ il est donc la composition de ce mouvement circulaire uniforme et du mouvement d'entraînement de $\mathcal{R}_d$. La trajectoire a donc la forme d'une trochoïde (« cycloïde allongée » ou « cycloïde raccourcie » selon la valeur de E_1).

